



ce
pre
UNI

Álgebra

**TEMA: TEOREMA DEL RESIDUO,
TEOREMA DEL FACTOR,
DIVISIBILIDAD. COCIENTES
NOTABLES.**

**CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1**



Teorema del residuo

Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. En la división algebraica

$$P(x) \div (ax + b)$$

El residuo de dicha división está expresado por:

$$R(x) = P\left(\underbrace{-\frac{b}{a}}_{\text{Constante}}\right)$$

Nota. El residuo $R(x)$ es un polinomio constante.

Demostración:

1. Del Algoritmo de la División tenemos $P(x) = Q(x)(ax + b) + R(x)$,
luego sustituir x por $-\frac{b}{a}$
2. Obteniendo $P\left(-\frac{b}{a}\right) = Q\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\underbrace{a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b}_0\right) + R(x)$
3. Por lo tanto $R(x) = P\left(-\frac{b}{a}\right)$

Regla práctica para calcular el residuo:

Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. En la división algebraica

$$P(x) \div (ax + b)$$

1. Igualamos a cero el divisor:

$$ax + b = 0$$

2. Despejamos x :

$$x = -\frac{b}{a}$$

3. Sustituimos x por $-\frac{b}{a}$ en $P(x)$:

$$R(x) = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Ejercicio. Determine el residuo de la siguiente división algebraica:

$$\underbrace{(8x^{400} + x^{397} + 6x^2 + 5x + 2)}_{P(x)} \div (2x + 1)$$

Solución:

1. Igualamos a cero el divisor:

$$2x + 1 = 0$$

2. Despejamos x :

$$x = -\frac{1}{2}$$

3. Sustituir $x = -\frac{1}{2}$ en $P(x)$ para obtener el residuo:

$$R(x) = P\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^{400} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{397} + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 1$$

Teorema del residuo

Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$. En la división algebraica

$$P(x) \div (ax^n + b)$$

El residuo de dicha división está expresado por:

$$R(x) = P\left(x^n = -\frac{b}{a}\right)$$

Nota. $GR(R(x)) < n$.

Demostración:

1. Del Algoritmo de la División $P(x) = Q(x)(ax^n + b) + R(x)$

2. Sustituimos $x^n = -\frac{b}{a}$ en la igualdad anterior, note que en $R(x)$ no aparece el término x^n

$$P\left(x^n = -\frac{b}{a}\right) = Q\left(-\frac{b}{a}\right) \underbrace{\left(a \cdot -\frac{b}{a} + b\right)}_0 + R(x)$$

3. Luego $R(x) = P\left(x^n = -\frac{b}{a}\right)$

Regla práctica para calcular el residuo:

Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$. En la división algebraica

$$P(x) \div (ax^n + b)$$

1. Igualamos a cero el divisor:

$$ax^n + b = 0$$

2. Despejamos x^n :

$$x^n = -\frac{b}{a}$$

3. Sustituimos x^n por $-\frac{b}{a}$ en $P(x)$:

$$R(x) = P\left(x^n = -\frac{b}{a}\right)$$

Sustituimos tantas veces como sea necesario hasta que $GR(R(x)) < n$.

Ejercicio. Determine el residuo de la siguiente división algebraica:

$$\underbrace{(2x^5 + 4x^4 + 5x^3 + x^2 + 1)}_{P(x)} \div (2x^4 - 5)$$

Solución:

1. Igualamos a cero el divisor:

$$2x^4 - 5 = 0$$

2. Despejamos x^4 :

$$x^4 = \frac{5}{2}$$

3. Sustituimos x^4 por $\frac{5}{2}$ en $P(x)$:

$$P(x) = 2x \cdot \mathbf{x^4} + 4\mathbf{x^4} + 5x^3 + x^2 + 1$$

$$R(x) = P\left(x^4 = \frac{5}{2}\right) = 5x^3 + x^2 + 5x + 11$$

donde $GR(R(x)) < 4$ cumple.

Ejercicio. Determine el residuo de la siguiente división algebraica:

$$\underbrace{(-12x^4 + 15x^3 - 7x^2 + 10x + 11)}_{P(x)} \div (x^2 + 10)$$

Solución:

1. Igualamos a cero el divisor:

$$x^2 + 10 = 0$$

2. Despejamos x^2 :

$$x^2 = -10$$

3. Sustituimos x^2 por -10 en $P(x)$:

$$P(x) = -12(\mathbf{x^2})^2 + 15\mathbf{x^2} \cdot x - 7\mathbf{x^2} + 10x + 11$$

$$R(x) = P(x^2 = -10) = -140x - 1119$$

donde $GR(R(x)) < 2$ cumple.

Definición.

Sean $D(x), d(x) \in \mathbb{R}[x]$. Decimos que el polinomio $D(x)$ es divisible por $d(x) \neq 0$, si existe un polinomio $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que:

$$D(x) = Q(x) \cdot d(x)$$

Decimos también que el polinomio $d(x)$ es un factor de $D(x)$.

Ejemplo.

Si $P(x) = x^3 - 8$, notamos que

$$P(x) = x^3 - 2^3 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

Entonces $(x^2 + 2x + 4)$ es un factor de $P(x)$, similarmente $(x - 2)$ es también un factor de $P(x)$.

Propiedad.

Sean $D(x), d(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $d(x)$ un polinomio no nulo. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $D(x)$ es divisible por $d(x)$.
2. La división $D(x) \div d(x)$ es exacta, es decir, el residuo es nulo.
3. $d(x)$ es un factor de $D(x)$.
4. $d(x)$ es un divisor de $D(x)$.

Definición.

Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio no idénticamente nulo y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que α es una **raíz** real del polinomio $P(x)$ si la evaluación:

$$P(\alpha) = 0$$

Ejemplo:

Si $P(x) = x^3 - x - 6$, notamos que

$$P(\mathbf{2}) = 0$$

Entonces **2** es una raíz de $P(x)$.

Teorema del Factor

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si a es una raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

$$P(a) = 0$$

$(x - a)$ es un factor de $P(x)$

b) Si $P(x)$ es divisible por $(x - a)$, entonces a es una raíz de $P(x)$.

$(x - a)$ es un factor de $P(x)$

$$P(a) = 0$$

Ejemplo

Dado el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Notamos que 1 es una raíz de $P(x)$: $P(\mathbf{1}) = 0$

Suma de coeficientes

Entonces por el Teorema del Factor $(x - \mathbf{1})$ es un factor de $P(x)$, es decir, $P(x)$ es de la forma:

$$P(x) = (x - 1) \cdot q(x)$$

Nota: El polinomio $q(x)$ es de grado 2, el cual se puede calcular aplicando el método de Ruffini.

Propiedades:

1. La suma de coeficientes de un polinomio $P(x)$ es cero (es decir, $P(1) = 0$) si y solamente si $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$.
2. El término independiente de un polinomio $P(x)$ es cero (es decir, $P(0) = 0$) si y solamente si (x) es un factor de $P(x)$.

Ejercicio. Verifique que $(x + 3)$ es un factor del siguiente polinomio:

$$P(x) = 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 3x + 9$$

Solución:

Notemos que $x + 3 = x - (-3)$, entonces por el Teorema del Factor tenemos que verificar que $P(-3) = 0$:

$$P(-3) = 2(-3)^5 + 6(-3)^4 + 5(-3)^3 + 15(-3)^2 + 3(-3) + 9$$

$$P(-3) = -486 + 486 - 135 + 135 - 9 + 9$$

$$P(-3) = 0$$

Luego $(x + 3)$ es un factor de $P(x)$, es decir $P(x)$ es de la forma:

$$P(x) = (x + 3) \cdot Q(x)$$

Nota: El polinomio $Q(x)$ es de grado 4, el cual se puede calcular aplicando el método de Ruffini.

Propiedad. Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq b$) tal que:

1. El residuo de la división $P(x) \div (x + a)$ es $R(x) = r$

2. El residuo de la división $P(x) \div (x + b)$ es $R(x) = r$

Entonces el residuo de la división $P(x) \div [(x + a)(x + b)]$ es también $R(x) = r$.

En particular se cumple la siguiente propiedad:

Propiedad. Sean $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq b$) tal que:

1. $P(x)$ es divisible por $(x - a)$

2. $P(x)$ es divisible por $(x - b)$

Entonces $P(x)$ es también divisible por $[(x - a)(x - b)]$.

Propiedad. Sean $P(x), Q(x), H(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que:

1. $P(x)$ es divisible por $H(x)$.
2. $Q(x)$ es divisible por $H(x)$.

Entonces:

1. $(P(x) + Q(x))$ es divisible por $H(x)$.
2. $(P(x) - Q(x))$ es divisible por $H(x)$.
3. $(a \cdot P(x) + b \cdot Q(x))$ es divisible por $H(x)$.
4. $(P(x) \cdot Q(x))$ es divisible por $H^2(x)$.

Ejercicio. Sea $P(x)$ un polinomio de tercer grado tal que al dividirlo por separado entre $(x - 5)$ y $(x - 4)$ se obtiene el mismo residuo 4, pero si se divide por separado entre $(x + 1)$ y $(x - 1)$ se obtiene como residuos 34 y 40 respectivamente. Calcule el término independiente del polinomio $P(x)$.

Solución: Aplicando la Propiedad de Residuos tenemos que:

El residuo de la división $P(x) \div [(x - 5)(x - 4)]$ es también $R(x) = 4$

Es decir $P(x) = (x - 5)(x - 4)Q(x) + 4$

Donde $Q(x)$ debe ser un polinomio de grado 1, $Q(x) = ax + b$.

$$P(x) = (x - 5)(x - 4)(ax + b) + 4$$

Aplicando el Teorema del Residuo tenemos que:

$$1. P(-1) = (-1 - 5)(-1 - 4)(a \cdot (-1) + b) + 4 = 34$$

$$2. P(1) = (1 - 5)(1 - 4)(a \cdot (1) + b) + 4 = 40$$

De donde obtenemos que $a = 1$ y $b = 2$. Luego $P(x) = (x - 5)(x - 4)(x + 2) + 4$

De donde el término independiente de $P(x)$ es $P(0) = 44$.

Cocientes Notables

Se denominan Cocientes Notables a los cocientes que provienen de las divisiones exactas de las 3 formas siguientes:

Primera Forma.

n es un entero positivo

$$\underbrace{\frac{x^n - y^n}{x - y}}_{\text{División Exacta}}$$

Segunda Forma.

n es un entero positivo impar

$$\underbrace{\frac{x^n + y^n}{x + y}}_{\text{División Exacta}}$$

Tercera Forma.

n es un entero positivo par

$$\underbrace{\frac{x^n - y^n}{x + y}}_{\text{División Exacta}}$$

Observación:

La siguiente división algebraica no es exacta **NO ES UN COCIENTE NOTABLE**

$$\underbrace{\frac{x^n + y^n}{x - y}}_{\text{División no Exacta}}$$

Estudio de la Primera Forma. n es un entero positivo

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

División Exacta

Aplicando el Teorema del Residuo notamos que la división es exacta y por el Método de Ruffini tenemos que el cociente de la división es:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}}_{\text{Cociente Notable}}$$

Donde el número de términos del cociente es n y el término de lugar k (contando de izquierda a derecha) está dado por:

$$\underbrace{T_k = x^{n-k}y^{k-1}}_{\text{Término } k\text{-ésimo}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Estudio de la Primera Forma. n es un entero positivo

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

División Exacta

Término central (n impar):

$$T_C = T_{\frac{n+1}{2}}$$

Términos centrales (n par):

$$T_C^I = T_{\frac{n}{2}}, \quad T_C^{II} = T_{\frac{n}{2}+1}$$

Términos equidistantes

El término equidistante de $T_k = x^{n-k}y^{k-1}$ es el término de lugar k (contando de derecha a izquierda): $T_k^e = T_{(n+1)-k} = x^{k-1}y^{n-k}$.

Estudio de la Segunda Forma. n es un entero positivo impar

$$\underbrace{\frac{x^n + y^n}{x + y}}_{\text{División Exacta}} \quad (n \text{ impar})$$

Aplicando el Teorema del Residuo notamos que la división es exacta y por el Método de Ruffini tenemos que el cociente de la división es:

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = \underbrace{x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}}_{\text{Cociente Notable}}$$

Donde el número de términos del cociente es n y el término de lugar k (contando de izquierda a derecha) está dado por:

$$\underbrace{T_k = (-1)^{k-1}x^{n-k}y^{k-1}}_{\text{Término } k\text{-ésimo}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Estudio de la Segunda Forma. n es un entero positivo impar

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} \quad (n \text{ impar})$$

División Exacta

Término central

$$T_C = T_{\frac{n+1}{2}}$$

Términos equidistantes

El término equidistante de $T_k = (-1)^{k-1}x^{n-k}y^{k-1}$ es el término de lugar k (contando de derecha a izquierda):

$$T_k^e = T_{(n+1)-k} = (-1)^{k-1}x^{k-1}y^{n-k}.$$

Estudio de la Tercera Forma. n es un entero positivo par

$$\underbrace{\frac{x^n - y^n}{x + y}}_{\text{División Exacta}} \quad (n \text{ par})$$

Aplicando el Teorema del Residuo notamos que la división es exacta y por el Método de Ruffini tenemos que el cociente de la división es:

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = \underbrace{x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}}_{\text{Cociente Notable}}$$

Donde el número de términos del cociente es n y el término de lugar k (contando de izquierda a derecha) está dado por:

$$\underbrace{T_k = (-1)^{k-1} x^{n-k} y^{k-1}}_{\text{Término } k\text{-ésimo}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Estudio de la Tercera Forma. n es un entero positivo par

$$\underbrace{\frac{x^n - y^n}{x + y}}_{\text{División Exacta}} \quad (n \text{ par})$$

Términos centrales

$$T_C^I = T_{\frac{n}{2}}, \quad T_C^{II} = T_{\frac{n}{2}+1}$$

Términos equidistantes

El término equidistante de $T_k = (-1)^{k-1}x^{n-k}y^{k-1}$ es el término de lugar k (contando de derecha a izquierda)

$$T_k^e = T_{(n+1)-k} = (-1)^k x^{k-1} y^{n-k}.$$

Caso General. Cociente Notables:

$$\frac{x^a - y^b}{x^c - y^d} = \frac{(x^c)^{\frac{a}{c}} - (y^d)^{\frac{b}{d}}}{(x^c) - (y^d)} \quad a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

Genera un cociente notable si y solamente si

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = n \in \mathbb{N}$$

Luego considerando a x^c e y^d como x e y respectivamente
Podemos aplicar todo lo hecho anteriormente a esta división.

Ejercicio. Determine el término central del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{2a} - y^a}{x^{2b} - y^b}$$

Sabiendo que el tercer término del cociente notable es $x^{36}y^6$.

Solución: El número de términos del cociente notable es:

$$\frac{2a}{a} = \frac{2b}{b} = n$$

Del enunciado tenemos que:

$$T_k = (x^{2b})^{n-k} (y^b)^{k-1}$$

$$T_3 = (x^{2b})^{n-3} (y^b)^{3-1} = x^{36}y^6$$

De donde tenemos que $a = 27$, $b = 3$ y $n = 9$. Luego el término central es:

$$T_C = T_{\frac{n+1}{2}} = T_{\frac{9+1}{2}} = T_5 = (x^{2b})^{n-5} (y^b)^{5-1} = x^{24}y^{12}.$$

Ejercicio. Determine el lugar que ocupa el término de grado 101 del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{180} - y^{80}}{x^9 - y^4}$$

Solución: El número de términos del cociente notable es:

$$n = \frac{180}{9} = \frac{80}{4} = 20$$

Sea k el lugar que ocupa el término de grado 101:

$$T_k = (x^9)^{n-k} (y^4)^{k-1}$$

Del enunciado $GR(T_k) = 176 - 5k = 101$ de donde $k = 15$.

Ejercicio. Determine el término décimo primero contando desde el final del cociente notable:

$$\frac{a^{560} - b^{880}}{a^7 + b^{11}}$$

Solución: El número de términos del cociente notable está dado por:

$$n = \frac{560}{7} = \frac{880}{11} = 80$$

Obtengamos el término de lugar $k = 11$:

$$T_k = (-1)^{k-1} (a^7)^{n-k} (b^{11})^{k-1}$$

$$T_{11} = (a^7)^{69} (b^{11})^{10}$$

Luego el término décimo primero contando desde el final es el término equidistante:

$$T_{11}^e = -(a^7)^{10} (b^{11})^{69} = -a^{70} b^{759}$$